උසස් පෙළින් සරසවියට

මිනුවන්ගොඩ අධ්‍යාපන කලාපය

උසස් පෙළ ප්‍රතිඵල සංවර්ධන වැඩසටහන - 2025

සංයුක්ත ගණිතය - I	**12 ශ්‍රේණිය**	10	S	I	**කාලය පැය 3 යි මිනි.10 යි**

A කොටස

සියළුම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න.

(01) $\frac{2x}{x+3} \leq \frac{1}{x+1}$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(02) සියලු $x \in \mathrm{R}$ සඳහා $3x^2 + x + 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$ වන පරිදි A , B හා C නියත පවතින බව දී ඇත. A, B හා C හි අගයන් සොයා එනයින් $\frac{3x^2+x+1}{x(x+1)^2}$ භින්න භාග වලින් ලියා දක්වන්න.

(03) $\lim_{x \to 0} \frac{[(8+x)^{\frac{1}{3}} - 2] \, Sin \, 2x}{x^2} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(04) *P* නම් ඉලිප්සය පරාමිතිකව $x = 3 \; Cos \; \theta$, $y = 2 \; Sin \; \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ මඟින් දෙනු ලබයි. P ඉලිප්සයට $A \equiv (3 \text{ Cos } \theta , 2 \text{ Sin } \theta)$, $\theta = \text{Sin}^{-1} \left(\frac{3}{5}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අදිනු ලබන අභිලම්බයේ සමීකරණය $9x - 8y - 12 = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙම අභිලම්බය නැවත p ඉලිප්සය $B \equiv (3 \text{ Cos } \beta, 2 \text{ Sin } \beta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දි හමුවේ නම්, $27 \text{ Cos } \beta - 16 \text{ Sin } \beta = 12$ බව පෙන්වන්න.

(05) $y = 3x^2 + 5x + p$ ශ්‍රිතයේ අවම අගය සොයා එනයින් වක්‍රය x අක්ෂය ස්පර්ශ වීමට පැවතිය යුතු p හි අගය සොයන්න.

(06) ABC ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ වල ඛණ්ඩාංක පිළිවලින් A(1, 1) , B(4, 5) , C(6, 13) නම් Cos A හි අගය නිර්නය කරන්න.

(07) $2x^2 + bx - 15 = 0$, $2x^2 - bx + 6 = 0$ සමීකරණ වලට පොදු මූල ඇත්නම් b ට තිබිය හැකි අගයන් සොයන්න.

(08) AB රේඛා ඛණ්ඩය මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටන්නේ AC: CB = 1 : 3 වන පරිදිය. A(-4, 4), C(-2, 3) නම් B ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(09) $f(x) = x^{2026} + x + 2$ නම්, $f(x)$, $(x^2 - 1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(10) $\sqrt{3}\,(\sin x + Cos\ x)^2 = \text{Cos}\ 2x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

I පත්‍රය - B කොටස

(11) (a) $k \in \mathbb{R}^+$ විට $f(x) = kx^2 + (k - 1)x + 1 - 2k$ යැයි ගනිමු. $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල ඇති බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, k ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා මූල දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

තවද α^2 හා β^2 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

$f(x) = 0$ සමීකරණයේ එක් මූලයක් අනෙක් මූලය මෙන් තුන් ගුණයක් වේනම්, එවිට k සඳහා ගත හැකි අගයන් සොයන්න.

(b) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b, c \in R$ වේ $(x^2 - 4)$, $g(x)$ හි සාධක වේ නම්, b හි අගය සොයන්න.

$g(x)$, $2x^2 - kx$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $8x - 4k$ වේ. මෙහි $k \in R$ වේ. k, a හා c හි අගයන් සොයන්න.

තව ද a, b, c මෙම අගයන් ගන්නා විට $g(x)$, ඒකජ සාධක වල ගුණිතයක් ලෙස ලියන්න.

(12) (a) $y = |x + 1| - 2$ සහ $y = 3 - |x - 2|$ හි ප්‍රස්තාර වල දළ සටහන් එකම සටහනක අඳින්න.

එනයින් $|x + 1| + |x - 2| = 5$ වන x හි අගයන් සොයා $|x + 1| + |x - 2| < 5$ අසමානතාවය තෘප්ත කරන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(b) $\frac{4x}{2x-3} \leq x + 1 \leq \frac{9}{x-7}$; $x \neq \frac{3}{2}$ සහ $x \neq 7$

අසමානතාවය සපුරාලන x හි තාත්වික අගය කුලකය සොයන්න.

(c) (i) $\log_a b . \log_b a = 1$ බව පෙන්වන්න. එනයින්

$$\frac{1}{1+\log_a bc} + \frac{1}{1+\log_b ca} + \frac{1}{1+\log_c ab} = 1$$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} = \frac{2}{\log_b x}$ නම් a, b, c ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද වන බව පෙන්වන්න.

(d) $(1 + 2\log_4 x)\log_{10} 2 = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

(13) (a) පහත සීමා අගයන්න.

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1+2\,Sin^2 x - Cos\,(2\,Sin\,x)}{x^2}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4-4}{Sin\,4\,x}$

(iii) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2-3x+9x^3}}{\sqrt{4x^2+1}\,\sqrt{x+1}}$

(iv) $a > 0$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x\to 0} \frac{1-Cos\,(ax)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}} = 16$ වන පරිදි a හි අගය සොයන්න.

(b) $y = \mathrm{Cos}\,\frac{x}{2}$ ප්‍රමූලධර්ම මගින් අවකලනය කරන්න.

(c) අනුක්‍රමණය 3 වූ l සරල රේඛාව, $A \equiv (2, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි. B යනු AB දුර ඒකක $3\sqrt{10}$ වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. B ලක්ෂ්‍යය සඳහා තිබිය හැකි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ඒවා B_1, B_2 නම් $B_1\,O\,B_2$ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න. මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

(14) (a) $x \neq 1$ සඳහා $f\,(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු. $x \neq 1$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f^{1}(x)$ යන්න $f^{1}\,(x) = \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

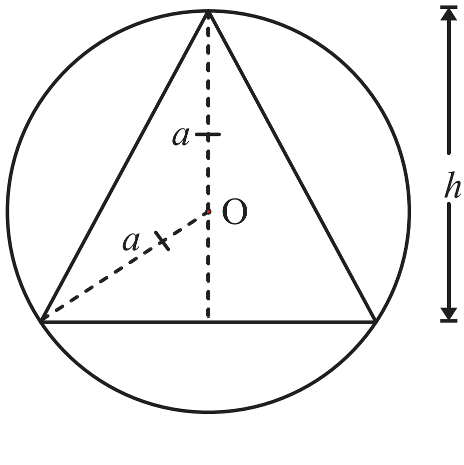
$x \neq 1$ සඳහා $f^{11}\,(x) = \frac{8x+10}{(x-1)^4}$ බව දී ඇත. එනයින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය, අන්තඃඛණ්ඩ හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි අරය a වන ගෝලයක සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් අන්තර්ගත කළ යුතුව ඇත. කේතුවේ උස h නම්, කේතුවේ පරිමාව, $V = \frac{\pi}{3}\,(2ah^2 - h^3)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තවද, ගෝලය තුළ අන්තර්ගත කළ හැකි විශාලතම එබඳු කේතුව ලැබෙන්නේ $h = \frac{4a}{3}$ වන විට බව පෙන්වන්න.

කේතුවේ පරිමාව උපරිමක් නම්, එය ගෝලයේ පරිමාවෙන් $\frac{8}{27}$ ක් බව අපෝහනය කරන්න.



(15) (a) පහත ශ්‍රිත x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $y = x\ Sin\ x + Cos\ x$

(ii) $xy^2 - x^2y = 4$

(iii) $y = tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

(b) (i) $y = tan\ x + \frac{1}{3}\ tan^3\ x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = Sec^4 x$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $y = [tan\ x + Sec\ x]^n$ නම් $\frac{dy}{dx} = ny\ sec\ x$ බව පෙන්වන්න.

(c) $y = x\ Sin^{-1} x$ නම්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{1-x^2}$ බව පෙන්වන්න.

(16) (a) $x \in R$ සඳහා $f(x) = 1 + 2\ Sin\ x\ (Cos\ x + \sqrt{3}\ Sin\ x) - \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. $f(x) = A + B\ Sin\ (2x - \alpha)$ වන පරිදි A, B හා α තාත්ත්වික නියත පවතින බව පෙන්වන්න. මෙහි $0 < \alpha < \pi/2$ වේ. $f(x)$ ශ්‍රිතයේ පරාසය සොයා $(-\pi/2\ ,\pi/2)$ වසම තුළ $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(b) ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයකි. $A + B + C = 180^0$ විට පහත සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

(i) Tan A + Tan B + Tan C = Tan A. Tan B. Tan C

(ii) $\frac{a+b}{a-b} = \text{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right) . \text{Cot}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

(c) $x > 2y > 0$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාද වල දිග පිළිවලින් $x + y$, x හා $x - y$ වේ. Sin A - 2 Sin B +Sin C = 0 බව පෙන්වා $\text{Cos}\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\ \text{Cos}\left(\frac{A+C}{2}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(17) (a) Cos A, Cos B, Sin A හා Sin B ඇසුරෙන් Co s (A + B) හා Cos (A - B) ලියා දක්වන්න.
එනයින් $\text{Cos C} + \text{Cos D} = 2\ \text{Cos}\left(\frac{C+D}{2}\right) . \text{Cos}\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.
$\text{Cos c} - \text{Cos D} = -2\ \text{Sin}\left(\frac{C+D}{2}\right). \text{Sin}\left(\frac{C-D}{2}\right).$ බව අපෝහනය කරන්න.
එනයින් හෝ අන් අයුරකින්
Cos (A+ B + C) + Cos (A+B - C) + Cos (B+C- A) + Cos (C+ A - B) = 4 Cos A. Cos B. Cos C බව පෙන්වන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
කෝසයින නීතිය භාවිතයෙන් $a^2 = (b - c)^2 + 4\ bc\ \text{Sin}^2\ A/2$ බව පෙන්වන්න.
$a = (b - c)\ \text{Sec}\ \theta$ නම්, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{(b-c)}\ \text{Sin}\ A/2$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi/2$ නම්, $xy + y\,z + z\,x = 1$ බව පෙන්වන්න.